2025 年度

京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻入学資格者選考試験

修士課程　一般学力選考及び特別選考　試験問題

専門科目（数学）

注意事項

１．合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない。

２．この問題冊子には，専門科目（数学）の問題が 4 題記載してある。問題冊子は，表紙を除き合計７ページ（下書き用紙は含まない）である。4 題とも解答すること。

３．問題冊子は，下書き用紙も含め切り離してはいけない。

４．専門科目（数学）試験は，２００点満点である。

５．解答用紙は 4 枚１組である。
なお，解答用紙の裏面は使用可であるが，その場合切取り線（用紙上部の実線）より下部を使用すること。また，すべての解答用紙の上部に必ず，受験番号・氏名，問題番号を記入すること。

６．試験時間は，１時間３０分である。（午前１０時から１１時３０分まで）

7．試験時間が終了したら直ちに解答をやめ，室長の指示に従うこと。解答用紙を持ち帰ることはできない。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

数　　　学	問題番号： 1

（１枚の内１）

以下の[1]～[3]の問いに答えなさい。

[1]

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について，固有値とそれぞれの固有空間の基底と次元を求めなさい。

[2]

行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい。

[3]

対称行列 $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化しなさい。

数　　　　学	問題番号： 2

以下の[1]〜[3]の問いに答えなさい。

なお，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は直交座標系（x, y, z）における x 方向, y 方向, z 方向の正の方向にそれぞれ向く単位ベクトルである。

[1] $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{D} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ のとき，

[1-1]　外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を求めなさい。

[1-2]　$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい。

[1-3]　$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい。

[2] 平面 S：$z = 1 - x - y$ ，$x \geqq 0$ ，$y \geqq 0$ ，$z \geqq 0$におけるベクトル場 $\boldsymbol{E} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + \mathrm{z}\boldsymbol{k}$ の面積分 $\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算しなさい。ただし，平面 S 上における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは，原点から遠ざかるように選ぶこととする。

[3] 球面 $\boldsymbol{p}(\theta,\varphi) = [a\sin\theta\cos\varphi\,, a\sin\theta\sin\varphi\,, a\cos\theta]$,（$0 \leqq \theta \leqq \pi$，$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$）の面積 s を求めるために，面積分 $\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi$ を計算しなさい。

数　　　学	問題番号： 3

（2 枚の内 1）

以下の[1]〜[3]の微分方程式を解きなさい。なお，[1]は定数変化法により解くこと。
ラプラス変換を用いるときは，表 1，2 を参考にしなさい。

[1]

$$\frac{dy}{dx} + 2y + 3\sin x = 0$$

[2]

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx}e^y$$

[3]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = xe^{2x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

数　　　学	問題番号：　３

（2 枚の内 2）

表１　基本的な関数のラプラス変換

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$F(s)$ の定義域
1	$\dfrac{1}{s}$	$s > 0$
$t^p \ (p > -1)$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\exp(at)$	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$\dfrac{t^n \exp(-at)}{n!}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$s > -a, \quad a > -1,$ $n = 0, 1, ..$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$

ただし、　$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

表２ ラプラス変換の公式

公式	条件
$\mathcal{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$	$a > 0$ は定数
$\mathcal{L}[\exp(at)\, f(t)] = F(s-a)$	a は定数
$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}\left[f'^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots - sf'^{(n-2)}(0) - f'^{(n-1)}(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u)\, du$

数　　学	問題番号： 4

以下の [1], [2] の問いに答えなさい。

[1] 2 つの変数のペアに対する n 個の観測データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$ がある。x_i と y_i に対し，最小二乗法により単回帰分析して回帰式(1)を得た。式(1)において，a は定数項，b は回帰係数，e_i は残差である。

$$y_i = a + b\,x_i + e_i \qquad (1)$$

最小二乗法では残差二乗和 $RSS = \sum_i e_i^2$ が最小となるように a, b を推定する。RSS を a および b で偏微分して 0 に等しくなるとおくことにより，以下の 2 本の式を得る。

$$\frac{\partial RSS}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)x_i = 0 \qquad (3)$$

式(2), (3) を a, b について解くと，以下を得る。

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (4)$$

$$a = \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\bar{x} \qquad (5)$$

ただし，$\bar{x}$ および $\bar{y}$ は，それぞれ x_i および y_i の平均である。

回帰式のあてはまりの良さの指標として決定係数 R^2 がしばしば用いられる。決定係数は目的変数 y_i の変動TSSのうち，回帰式が説明できる変動ESSの割合を示したものである。具体的には，y_i の変動として y_i の平均との差の二乗和を用い，回帰式が説明できる変動として回帰式の予測値 $a + b\,x_i$ の平均との差の二乗和を用いる。式(8)が示すように，決定係数は相関係数 r を二乗した値に等しい。

$$TSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \qquad (6)$$

$$ESS = \sum_{i=1}^{n}[(a + b\,x_i) - (a + b\bar{x})]^2 = b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (7)$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = b^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = r^2 \qquad (8)$$

数　　学	問題番号： 4

（3 枚の内 2）

[1-1] 式(2)を変形すると,「回帰直線は x_iと y_iの平均からなる点 $(\bar{x}, \bar{y})$ を通過する」と解釈できる。そのように式(2)を変形しなさい。

[1-2] 式(3)が意味することの説明として最も適切なものを以下の（ア）～（オ）から１つ選びなさい。また，式(3)を変形して，その根拠を示しなさい。

（ア）残差 e_i の総和はゼロである。
（イ）残差 e_i の分散は説明変数 x_i によらず一定である。
（ウ）残差 e_i は系列相関を持たない。
（エ）残差 e_i と説明変数 x_i とは無相関である。
（オ）残差 e_i と説明変数 x_i とは独立である。

[1-3] 式(4)は，分子と分母を n で除すことにより，「回帰係数 b は x_iと y_iの共分散を x_i の分散で除したものに等しい」と解釈できる。さらに，式(4)の分子と分母に y_i の標準偏差を乗じることにより，どのように解釈することができるか。最も適切なものを以下の（ア）～（オ）から１つ選びなさい。

（ア）回帰係数 b は，回帰の決定係数に，x_iと y_iの標準偏差の比を乗じたものである。
（イ）回帰係数 b は，回帰の決定係数に，x_iと y_iの分散の比を乗じたものである。
（ウ）回帰係数 b は，x_iと y_iの相関係数に，x_iと y_iの標準偏差の比を乗じたものである。
（エ）回帰係数 b は，x_iと y_iの相関係数に，x_iと y_iの分散の比を乗じたものである。
（オ）回帰係数 b は，x_iと y_iの相関係数に，x_iと y_iの平均の比を乗じたものである。

[1-4] 式(6) (7)について, ESS と RSS の和が TSS と一致することを示しなさい。

[1-5] x_iと y_i とを入れ替えて最小二乗法により単回帰分析して回帰式(9)を得たとする。

$$x_i = c + d\, y_i + u_i \qquad (9)$$

cは定数項，dは回帰係数, u_iは残差である。

以下の（ア）～（オ）のうち，正しいものを選びなさい。（正しいものは１つとは限らない。）

（ア）回帰式(9)の決定係数は，回帰式(1)の決定係数と常に等しい。
（イ）回帰式(9)の残差二乗和は，回帰式(1)の残差二乗和と常に等しい。
（ウ）d は b の逆数となる。
（エ）d と b の積は，x_iと y_iの相関係数と等しい。
（オ）d と b の積は，x_iと y_iの相関係数の二乗と等しい。

数　　学	問題番号：　4

[2] ある生物の年齢 Age と体長 $Length$ との観測値を得た。この観測値に対して単回帰分析をおこない図 1 の結果を得た。図の点は観測値を，直線は回帰直線を表す。年齢の平均値は 3.85 年，体長の平均値は 7.45 cm であった。その後，説明変数と目的変数を取り違えて回帰分析していることが判明し，式(10)の回帰分析を実施することとなった。式(10)において，$const$ は定数項であり，k は回帰係数， e は残差である。

$$Length = const + k \cdot Age + e \qquad (10)$$

問題文および図 1 の情報を用いて，式(10)の回帰係数 k を有効数字 3 桁で求めなさい。

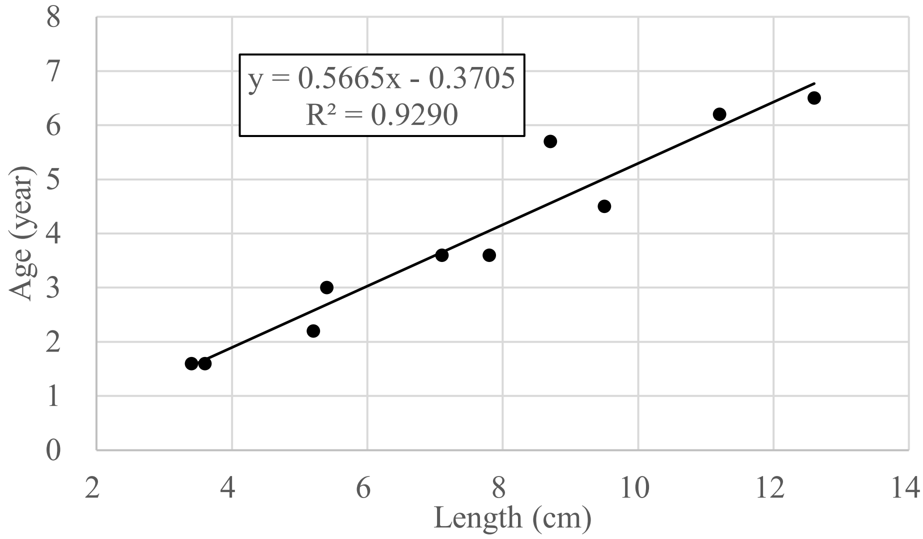

図 1　ある生物の体長と年齢の関係

（下書き用紙 Sheet for drafting）

（下書き用紙 Sheet for drafting）