２０２２年度

京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻入学資格者選考試験

修士課程　一般学力選考及び特別選考　試験問題

専門科目（数学）

注意事項

1．合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない。

2．この問題冊子には，専門科目（数学）の問題が４題記載してある。問題冊子は，表紙を除き合計７ページ（下書き用紙は含まない）である。4題とも解答すること。

3．問題冊子は，下書き用紙も含め切り離してはいけない。

4．専門科目（数学）試験は，２００点満点である。

5．解答用紙は４枚１組である。
なお，解答用紙の裏面は使用可であるが，その場合切取り線（用紙上部の実線）より下部を使用すること。また，すべての解答用紙の上部に必ず，受験番号・氏名，問題番号を記入すること。

6．試験時間は，１時間３０分である。（午前１０時から１１時３０分まで）

7．試験時間が終了したら直ちに解答をやめ，室長の指示に従うこと。解答用紙を持ち帰ることはできない。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

数　　学	問題番号： 1

（２枚の内１）

以下の[1]～[3]の問いに答えなさい。

[1] 行列の積について，次の（あ）～（こ）に当てはまる行列を，以下の A～I の行列の中から選び，その記号を答えなさい。なお，A～I はそれぞれ 2 回以上選んでもよい。

[1-1] （あ）×（い）はスカラーになる。

[1-2] （う）×（え）は 2×3 行列になる。

[1-3] （お）×（か）は 4×3 行列になる。

[1-4] （き）×（く）は逆行列をもつ 2 次正方行列である。

[1-5] （け）×（こ）は逆行列をもたない 2 次正方行列である。

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -4 & 10\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad \mathrm{E}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{F}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\quad \mathrm{G}=(1\quad -2),\quad \mathrm{H}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},\quad \mathrm{I}=(0\quad -1\quad -3\quad 1)$$

[2] 次の行列式の値がいずれも 1 となる様に x と y の値をそれぞれ求めなさい。

[2-1] $\begin{vmatrix}x & 1 & 0 & 0\\ 1 & x & 1 & 0\\ 0 & 1 & x & 1\\ 0 & 0 & 1 & x\end{vmatrix}$

[2-2] $\begin{vmatrix}1 & -y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -y & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -y\\ 1 & 0 & -13 & 0 & 37\end{vmatrix}$

数　　　学	問題番号：1

[3]　次の行列式を計算しなさい。

[3-1]　$\left|\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\right|$

[3-2]　$\left|\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$

[3-3]　$\left|\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$

数　　学	問題番号： 2

（1枚の内1）

以下の[1]～[3]の問いに答えなさい。
なお，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系(x, y, z)における x 方向, y 方向, z 方向の正の方向にそれぞれ向く単位ベクトルである。

[1] $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$,　$\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$,　$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ のとき，
次の[1-1]～[1-3]にそれぞれ答えなさい。

[1-1] 次のそれぞれの内積を求めなさい。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}$$

[1-2] $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$を単位ベクトル$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$で表しなさい。

[1-3] $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = x\boldsymbol{A} + y\boldsymbol{B} + z\boldsymbol{C}$　となるとき，x, y, z をそれぞれ求めなさい。

[2] 曲線 C : $\boldsymbol{r} = a\cos u\,\boldsymbol{i} + a\sin u\,\boldsymbol{j} + b\,u\,\boldsymbol{k}$ $(0 \leq u \leq \pi)$に対して，次の線積分を求めなさい。

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\,dr$$

[3] 平面 S : $2x + y + z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ におけるスカラー場 $f = x - y + z$ の面積分

$$\iint_S f\,dS$$

を求めなさい。

数　　　学	問題番号： 3

（２枚の内１）

$y(x)$ に関する以下の[1]～[3]の微分方程式を解きなさい。
ただし，[1] は特性方程式を用いて，[2] はラプラス変換（表 1，表 2）を用いて解きなさい。

[1]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-20y=0$$

ただし，$y(0)=0,\quad y(1)=2$

[2]

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=\exp(x)\cos(x)$$

ただし，$y(0)=-1,\quad y'(0)=0$

[3]

$$x\frac{dy}{dx}+2y=\cos(x)$$

ただし，$y(\pi)=0$

数　　学	問題番号： 3

（２枚の内２）

表 1　基本的な関数のラプラス変換

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$F(s)$ の定義域
1	$\dfrac{1}{s}$	$s > 0$
$t^p \ (p > -1)$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
$t^n \ (\mathrm{n} = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\exp(at)$	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$

ただし，　$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

表 2 ラプラス変換の公式

公式	条件
$\mathcal{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$	$a > 0$ は定数
$\mathcal{L}[\exp(at) f(t)] = F(s-a)$	a は定数
$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}\left[f'^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots - s f'^{(n-2)}(0) - f'^{(n-1)}(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u)\, du$

数　　学	問題番号：　4

（２枚の内１）

以下の[1]～[2]の問いに答えなさい。

[1] 2変数X, Yのデータから，それらの定量的関係を表す式を求める回帰分析において，独立（説明）変数x，従属（目的）変数yとして$y = a + bx$　という線形関係を考える。変数Xがx_iの値をとるとき，確率変数Yの実現値y_iは，誤差項ε_iを用いて

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$$

と表される。

観測値から未知のパラメータa, bを推定するために，誤差項ε_iは以下の条件を満たす。

・期待値は$\boxed{\quad ア \quad}$である。

・分散は一定の値σ^2を取る。

・異なる誤差項は互いに独立である。

n個の観測値$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots (x_n, y_n)$から，最小二乗法を用いて回帰係数$a, b$ を推定する場合，x_iから予想されるy の値と実際に観測された値y_iの差 ε_iの二乗の総和

$$S = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\quad イ \quad}$$

を最小とする$\hat{a}, \hat{b}$ を求めればよい。

従って，a, b それぞれで一次の偏微分を0とする二つの連立方程式

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} \boxed{\quad ウ \quad} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} \boxed{\quad エ \quad} = 0$$

を解くことにより，標本回帰係数 $\hat{a}$, $\hat{b}$が求められる。

この解は,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x^2}, \ \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

となる。なお，$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, ${S_x}^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ である。

[1-1]　$\boxed{\quad ア \quad}$に入る数値を答えなさい。

[1-2]　$\boxed{\quad イ \quad}$～$\boxed{\quad エ \quad}$に入る式を答えなさい。

数　　　学	問題番号：4

ある月のn日の大気汚染物質濃度と気温のデータを用いて分析した報告書がある。気温，大気汚染物質濃度の平均値は，それぞれ 21℃，15μg/m³ で，2 変数の相関係数(Pearson の積率相関係数)は 0.6，気温を従属変数(y)，大気汚染物質を独立変数(x)として回帰した結果は $y = 18 + \frac{1}{5}x$ であった。以上の情報から，大気汚染物質濃度を従属変数，気温を独立変数としたモデル式を推定したい。[1]で示された $\hat{b}$ は，xとyのデータの相関係数 r_{xy}，および S_x^2, $S_y^2\left(=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\right)$ を使って $\hat{b} =$ オ と表されることを利用すると，大気汚染物質濃度をc，気温をtとした回帰式は，

$$c = \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}\,t$$

となる。

[1-3] オ に入る式を答えなさい。

[1-4] カ , キ に入る数値を答えなさい。

[1-5] 得られたモデル式がデータにどの程度当てはまっているかを示す決定係数は

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i{}^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

であるが，このデータのR^2はいくらになるか。有効数字 2 桁で答えなさい。

[2] ク ～ サ に入る式をm, nを用いて表しなさい。

ある地域で無作為に抽出した高校生について毛髪中の重金属濃度を測定し，一定の濃度以上となった場合を陽性とした。n人を対象として調査したところ陽性者はm人であった。nが十分大きいとき，中心極限定理により標本中の陽性者の比率 $\hat{p}$ は平均 ク ，分散 ケ の正規分布に従うとみなせる。したがって，この地域の高校生の陽性者の比率 p の 95%信頼区間は，

$$\boxed{\text{コ}} \pm Z_{0.025} \times \boxed{\text{サ}}$$

となる。なお，$Z_{0.025}$ は標準正規分布の上側 2.5%点である。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

（下書き用紙 Sheet for drafting）