２０２１年度

京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻入学資格者選考試験
修士課程　一般学力選考及び特別選考　試験問題

専門科目（数学）

注意事項

１．合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない。

２．この問題冊子には，専門科目（数学）の問題が４題記載してある。問題冊子は，表紙を除き合計８ページ（下書き用紙は含まない）である。<u>４題とも解答すること。</u>

３．問題冊子は，下書き用紙も含め切り離してはいけない。

４．専門科目（数学）試験は，２００点満点である。

５．解答用紙は４枚１組である。
なお，解答用紙の裏面は使用可であるが，その場合切取り線（用紙上部の実線）より下部を使用すること。また，<u>すべての解答用紙の上部に必ず，受験番号・氏名，問題番号を記入すること。</u>

６．試験時間は，１時間３０分である。（午前１０時から１１時３０分まで）

７．試験時間が終了したら直ちに解答をやめ，室長の指示に従うこと。解答用紙を持ち帰ることはできない。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

数　　学	問題番号： 1

（２枚の内１）

[1]　2つの行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が次の様に与えられるとき，[1-1]～[1-3]の計算をしなさい。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

[1-1]　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

[1-2]　$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

[1-3]　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$

[2]　2つの行列 $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{D}$ が次の様に与えられるとき，[2-1]と[2-2]の計算をしなさい。

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[2-1]　$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}$

[2-2]　$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}$

[3]　次の[3-1]と[3-2]の行列の逆行列をそれぞれ求めなさい。

[3-1]　$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

[3-2]　$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

数　　学	問題番号： 1

[4]　[4-1]～[4-3]の行列式の値をそれぞれ求めなさい。

[4-1] $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

[4-2] $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

[4-3] $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

数　　学	問題番号： 2

（１枚の内１）

以下の[1]～[3]の問いに答えなさい。
なお，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系（x, y, z）における x 方向，y 方向，z 方向の正の方向に向く単位ベクトルである。

[1] $\boldsymbol{A}(u) = u^2\boldsymbol{i} - u\boldsymbol{j} + (2u+1)\boldsymbol{k}$,　$\boldsymbol{B}(u) = (2u-3)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - u\boldsymbol{k}$　のとき，
次の[1-1]～[1-2]をそれぞれ求めなさい。

[1-1]

$$\int_0^1 \boldsymbol{A}(u) \cdot \frac{d\boldsymbol{B}(u)}{du} du$$

[1-2]

$$\int_0^1 \boldsymbol{A}(u) \times \boldsymbol{B}(u) du$$

[2] 曲面 $S_1 : \boldsymbol{r}(u,v) = \sin u \cos v\, \boldsymbol{i} + \sin u \sin v\, \boldsymbol{j} + \cos u\, \boldsymbol{k}$ $(0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi)$の表面積を求めなさい。

[3] 曲面 $S_2 : \boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\, \boldsymbol{i} + u \sin v\, \boldsymbol{j} + u\boldsymbol{k}$ $(0 \le u \le 1, 0 \le v \le \frac{\pi}{2})$ に対して
面積分

$$\int_{S_2} xy\, dS$$

を求めなさい。ただし，曲面 S_2 上では，$x = u\cos v$，$y = u \sin v$ とする。

数　　　学	問題番号： 3

（２枚の内１）

$y(x)$ に関する以下の[1]～[3]の微分方程式を解きなさい。
ラプラス変換を用いるときは，表-1，表-2 を参考にしなさい。

[1]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

ただし，$y(0) = 1$，$y(1) = 0$

[2]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 12x \cdot \exp(2x)$$

ただし，$y(0) = 2$，$y'(0) = 4$

[3]

$$\frac{dy}{dx} = -x^a \cdot y$$

ただし，$a > 0$, $x \geq 0$, $y(0) = 1$

数　　学	問題番号： 3

（２枚の内２）

表-1　基本的な関数のラプラス変換

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$F(s)$ の定義域
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^p \ (p > -1)$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
$t^n \ (\mathrm{n} = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\exp(at)$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$

ただし，　$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$,　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

表-2 ラプラス変換の公式

公式	条件
$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$ は定数
$\mathcal{L}[\exp(at) f(t)] = F(s-a)$	a は定数
$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}\left[f'^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots - s f'^{(n-2)}(0) - f'^{(n-1)}(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u)\, du$

数　　学	問題番号： 4

以下の[1]，[2]の問いに答えなさい。

なお，事象Aが生じる確率を$\Pr[A]$，事象Aと事象Bが同時に起こる確率を$\Pr[A \cap B]$，事象Aが生じた場合に事象Bが生じる条件付き確率を$\Pr[B|A]$と書くこととする。

[1]　疾患を診断するための検査の精度には感度，特異度という指標がある。「感度」は，実際にその疾患にかかっている場合に，検査で正しく「陽性」と判定する条件付き確率，「特異度」はその疾患にかかっていない場合に検査で正しく「陰性」と判定する条件付き確率である。検査キットにより感度と特異度は異なる。ある疾患を判定するためのスクリーニング検査キットが複数あり，検査キットKで陽性と判断される事象をT_k，陰性と判定される事象をNT_kと表す。また，実際にその疾患にかかっている事象をD，かかっていない事象をNDとする。これまでの経験から，検査を受ける人の中でその疾患を有する確率$\Pr[D]$はd，検査キットKの感度（$\Pr[T_k|D]$）はp_k，その特異度（$\boxed{\text{ア}}$）はq_k であることがわかっている。検査キットKで陽性であった場合，この疾患にかかっている確率 $\Pr[D|T_k]$を求めたい。

$\Pr[D|T_k]$は条件付き確率の定義から，式(1)で表すことができる。

$$\Pr[D|T_k] = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \qquad (1)$$

また，感度$\Pr[T_k|D]$を条件付き確率の定義から，式(2)で表すことができる。

$$\Pr[T_k|D] = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{エ}}} \qquad (2)$$

ここで，検査を受けた人が陽性となる確率$\Pr[T_k]$は，真に疾患にかかっている人が陽性となる場合と，疾患にかかっていないにも関わらず陽性となる場合もあるので，式(3)により表すことができる。

$$\Pr[T_k] = \boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}} \qquad (3)$$

式(1)，(2)，(3)より，$\Pr[D|T_k]$をd，p_k，q_kを用いて表すと$\boxed{\text{キ}}$となる。

数　　学	問題番号：4

ある検査センターでは，2 つの検査キットをランダムに選んで使っている。どちらの検査キットを使っているかはわからないが，検査キット 1 と 2 の使用割合はそれぞれ 20%, 80%であった。それぞれの検査キットの感度，特異度は以下のとおりである。

表-1 検査キットの感度と特異度

	感度	特異度
検査キット 1	0.95	0.70
検査キット 2	0.70	0.95

[1-1] $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{カ}}$に入る式をD, ND, T_k, NT_kを用いた確率として表しなさい。

[1-2] $\boxed{\text{キ}}$ に入る式をd, p_k, q_k で表しなさい。

[1-3] この検査センターで検査が陽性であった場合に，実際にこの疾患にかかっている確率はいくらか。$d = 0.10$として，有効数字 2 桁で答えなさい。

数　　学	問題番号： 4

[2] この疾患の原因として，化学物質 C への曝露が疑われている。疾患と化学物質 C への曝露との関連の有無を検定するために，無作為に抽出した成人 300 人を対象者として調査を行った。結果は表-2 に示すとおりであった。

表-2　化学物質 C の曝露と疾患の分割表

		化学物質C への曝露の有無		合計
		あり	なし	
疾患の有無	あり	24	57	81
	なし	45	174	219
	合計	69	231	300

[2-1] 疾患の有無と化学物質 C への曝露の有無に統計的相関がない（独立である）という帰無仮説が正しいとき，疾患「あり」で化学物質 C への曝露「あり」の期待頻度を求め，有効数字 2 桁で答えなさい。

[2-2] 疾患の有無と化学物質 C への曝露の有無の独立性のχ^2検定を有意水準$\alpha = 0.050$として行いなさい。なお，検定には表-3 を用いてもよい。

表-3　χ^2分布の上側α点

	α					
df	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025
1	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024
2	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378
3	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348
4	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143
5	0.831	1.145	1.61	9.236	11.07	12.833

表は自由度 df のχ^2分布の上側確率αに対するχ^2の値（$\chi^2_{\alpha,df}$）を与えている（右図は自由度$df = 5$の場合）。