平成２９年度

京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻入学資格者選考試験

修士課程　一般学力選考及び特別選考　試験問題

専門科目（数学）

注意事項

１．合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない．

２．この問題冊子には，専門科目（数学）の問題が４題記載してある．問題冊子は，表紙を除き合計５ページ（下書き用紙は含まない）である．４題とも解答すること．

３．問題冊子は，下書き用紙も含め切り離してはいけない．

４．専門科目（数学）試験は，２００点満点である．

５．解答用紙は４枚１組である．問題１題につきなるべく１ページに解答すること．なお，解答用紙の裏面は使用可であるが，その場合切取り線（用紙上部の実線）より下部を使用すること．また，すべての解答用紙の上部に必ず，受験番号・氏名，科目名，問題番号を記入すること．

６．試験時間は，１時間３０分である．（午前１０時から１１時３０分まで）

７．試験時間が終了したら直ちに解答をやめ，室長の指示に従うこと．解答用紙を持ち帰ることはできない．

数　　学	問題番号： 1

以下の[1]，[2]，[3]の問いに答えなさい．解答には必ず計算過程を示しなさい．

[1]　$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$について，以下の式を計算しなさい．

[1-1]　$2A - 3B$

[1-2]　AB

[2]　$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ が正則行列となるための a の条件を求めなさい．

[3]　次の行列式を因数分解しなさい．

[3-1]　$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (c+a)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

[3-2]　$\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & c+a & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$

数　　学	問題番号： 2

以下の[1]～[2]の問いに答えなさい.

[1] 直交座標系(x, y, z)におけるスカラーfのラプラシアンΔfを、円柱座標系(ρ, φ, z) に変換することを考える.

円柱座標系(ρ, φ, z) は, 図 1 における点 P の位置ベクトル **r**=**r**(ρ, φ, z)で定義される.

このとき, 空欄 ① ～ ④ を埋めなさい.

直交座標系(x,y,z)におけるスカラーfのラプラシアンは

$$\Delta f = \boxed{\quad ① \quad} \tag{1}$$

となる.

円柱座標系(ρ, φ, z) は, 図 1 における点 P の位置ベクトル **r**=**r**(ρ, φ, z)で定義され、x= ② , y= ③ , z=z と表される.

ただし, 0≦ρ≦∞, 0≦φ≦2π, -∞≦z≦∞である.

従って, Δfは円柱座標系で ④ と表される.

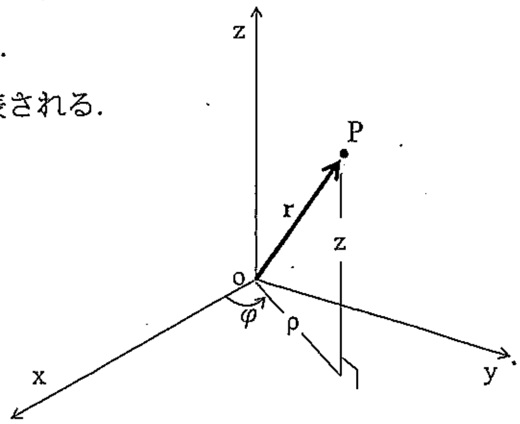

図 1

[2] **i**,**j**,**k** は直交座標系(x, y, z)における x 方向, y 方向, z 方向の単位ベクトルとする.
ベクトル場 **A** 内にある曲線 C について線積分の値を求めなさい.
曲線 C は螺旋で, $\mathbf{r} = \cos t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j} + bt\ \mathbf{k}$ $(0 \leqq t \leqq \pi/4)$, $\mathbf{A} = a(\sin t\ \mathbf{i} + \cos t\ \mathbf{j})$ (a は正の定数) である.

数　　学	問題番号： 3

（2枚の内1）

以下の[1]～[3]の問いに答えなさい．

[1] $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+y+1}{x+y-1}$ の一般解を求めなさい．また，初期条件 $y(1)=-1$ をみたす特殊解を求めなさい．

[2] 関数 $f(x)=x\sin 2x$ について以下の問いに答えなさい．ただし，$\mathcal{L}[\ \ ]$ はラプラス変換を表す．ラプラス変換を用いるときは，表1，2を参考にしなさい．

[2-1] $f'(x)$，$f''(x)$　を求めなさい．

[2-2] $f(0)$，$f'(0)$　を求めなさい．

[2-3] $\mathcal{L}[f(x)]$　を求めなさい．

[3] 以下を計算しなさい．ただし，$\mathcal{L}^{-1}[\ \ ]$ はラプラス逆変換を表す．

[3-1] $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+2}\right]$

[3-2] $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2-4s+3}\right]$

[3-3] $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{3s}\right]$

数　　学	問題番号： 3

（2枚の内2）

表 1　基本的な関数のラプラス変換

$f(t)$	$F(s)$	$F(s)$の定義域
1	$\dfrac{1}{s}$	$s>0$
$t^p\ (p>-1)$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s>0$
$t^n\ (n=0,1,2,\cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$\exp(at)$	$\dfrac{1}{s-a}$	$s>a$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$

ただし，$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ ，$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ ，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

表 2　ラプラス変換の公式

公式	条件
$\mathcal{L}\ [f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$	$a>0$ は定数
$\mathcal{L}\ \left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a)$	a は定数
$\mathcal{L}\ \left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0)$	$f(t)$は連続関数
$\mathcal{L}\ \left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)$ $\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$f(t)$は連続関数
$\mathcal{L}\ \left[f*g(t)\right]=F(s)G(s)$	$f*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

数　　学	問題番号： 4

お菓子のおまけが N 種類ある．どの種類も同じ確率（$1/N$）で出現するとき全種類を揃えるまでの購入個数を X とし，その期待値を求める．以下の空欄 $\boxed{\text{あ}}$ ～ $\boxed{\text{こ}}$ にあてはまる記号，数式または数値を答えなさい．

$dp[k]$ を k 種類を取得済みであるときに，N 種類全て揃うまでの，今後のお菓子の購入個数の期待値と定義する．

このとき，$k=N$ であれば，全種類揃うことになるので，$dp[N]=\boxed{\text{あ}}$ である．

次に，$k=N-1$ のときを考える．既に $N-1$ 種類揃った状態であり，未取得のものは 1 種類である．次に購入するものが，取得済みの種類である確率は $\boxed{\text{い}}$，未取得の種類である確率は $\boxed{\text{う}}$ である．取得済みの種類を購入した場合には，その後に購入することが必要なお菓子の購入個数の期待値は $dp[\boxed{\text{え}}]$ である．一方，未取得の種類である場合は，その後に購入することが必要なお菓子の購入個数の期待値は $dp[\boxed{\text{お}}]$ である．以上を踏まえると，以下の漸化式が成り立つ．

$$dp[N-1]=1+\boxed{\text{い}}\times dp[N-1]+\boxed{\text{う}}\times\boxed{\text{か}} \qquad (1)$$

$dp[N]=\boxed{\text{あ}}$ を代入し，$dp[N-1]$ について移項・整理すると，

$$dp[N-1]=\boxed{\text{き}} \qquad (2)$$

となる．

さらに，一般の $k\ (0 \leqq k < N)$ についても同様に考えて，$dp[k]$ を $dp[k+1]$ の漸化式で表すと，

$$dp[k]=\boxed{\text{く}} \qquad (3)$$

を得る．

$dp[0]$ を，式(3)を繰り返し適用して求めると，Σ記号を用いて以下のように表される．

$$dp[0]=\boxed{\text{け}} \qquad (4)$$

$N=6$ について，$dp[0]$ を計算すると，その値は $\boxed{\text{こ}}$ となる．