2023 年度

京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻入学資格者選考試験

修士課程　一般学力選考及び特別選考　試験問題

専門科目（数学）

注意事項

1．合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない。

2．この問題冊子には，専門科目（数学）の問題が４題記載してある。問題冊子は，表紙を除き合計６ページ（下書き用紙は含まない）である。4題とも解答すること。

3．問題冊子は，下書き用紙も含め切り離してはいけない。

4．専門科目（数学）試験は，２００点満点である。

5．解答用紙は４枚１組である。
なお，解答用紙の裏面は使用可であるが，その場合切取り線（用紙上部の実線）より下部を使用すること。また，すべての解答用紙の上部に必ず，受験番号・氏名，問題番号を記入すること。

6．試験時間は，１時間３０分である。（午前１０時から１１時３０分まで）

7．試験時間が終了したら直ちに解答をやめ，室長の指示に従うこと。解答用紙を持ち帰ることはできない。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

数　　学	問題番号：1

行列$\boldsymbol{X}$を

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。[1]〜[3]に答えなさい。

[1]　行列$\boldsymbol{X}$の固有値を求めなさい。

[2]　行列$\boldsymbol{X}$の固有ベクトルを求めなさい。

[3]　行列$\boldsymbol{X}$を対角化しなさい。

数　　学	問題番号： 2

以下の[1]～[3]の問いに答えなさい。

なお、$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は直交座標系（x, y, z）における x 方向, y 方向, z 方向の正の方向にそれぞれ向く単位ベクトルである。

[1]

[1-1] $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ のなす角を θ とするとき $\cos\theta$ の値を求めなさい。

[1-2] $\boldsymbol{C}(u) = e^{-2u}\boldsymbol{i} + \ln(u^3+1)\,\boldsymbol{j} - \cos u\,\boldsymbol{k}$ を微分しなさい。

[1-3] $\boldsymbol{D}(u) = u^3\boldsymbol{i} + 5u^2\boldsymbol{j} - u\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}(u) = \cos u\,\boldsymbol{i} + \sin u\,\boldsymbol{j}$ に対して、

$$\frac{d}{du}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})$$

$$\frac{d}{du}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E})$$

を求めなさい。

[2] 曲線 $\boldsymbol{r}(t) = 2t^3\boldsymbol{i} + 3\sqrt{2}t^2\boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k}$ の点 t = 2 から点 t = 5 までの弧長 $\boldsymbol{s}$ と単位接線ベクトルを求めなさい。

[3] 次式で示される曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ の点 P (2, 1, 3) における接平面の方程式と単位法線ベクトルを求めなさい。

$$\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + (u^2 - v^2)\boldsymbol{k}$$

数　　　学	問題番号： 3

（3 枚の内 1）

以下の[1]と[2]の微分方程式を解きなさい。また[3]の空欄①から⑥に適切な数式を記入しなさい。[2]の求解にあたっては、ラプラス変換を利用しなさい。ラプラス変換の表は後のページに示す。積分定数としては c_1 や c_2 等の表記の使用を推奨するが、別の表記を用いる場合は解答文中にその旨を記しなさい。

[1]

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0$$

[2]

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=te^{-t}$$

ただし初期条件は $y(0)=0$，$y'(0)=2$ とする。

[3] 一般に微分方程式が

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=0 \qquad (イ)$$

の全微分型に帰着できるなら、（イ）の一般解は

$$\boxed{①\qquad\qquad} = c \qquad (ロ)$$

になる。ただし c はある定数である。（イ）のような方程式を完全微分方程式という。
ここで下記の式（ハ）が完全微分方程式かどうかを調べる。

$$x^3+2xy+y+(y^3+x^2+x)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (ハ)$$

式（ハ）を全微分型に書き直すと以下の式(ニ)になる。

$$(\boxed{②\qquad\qquad})\ dx+(y^3+x^2+x)dy=0 \qquad (ニ)$$

式（イ）と式（ニ）を比較して

$$\boxed{②\qquad\qquad} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad (ホ)$$

$$y^3+x^2+x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad (ヘ)$$

となるような$f(x,y)$が存在するかを調べる。式（ト）の偏微分の順序交換に関する定理を利用する。

数　　学	問題番号：3

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \qquad \text{(ト)}$$

式（ホ）から

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)=\boxed{③\qquad} \qquad \text{(チ)}$$

式（へ）から

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\boxed{④\qquad} \qquad \text{(リ)}$$

となり式（チ）と（リ）から、式（ハ）は完全微分方程式であることが示せた。

最後に（ハ）の一般解を得るために$f(x,y)$を以下の方法で求める。

まず、（ホ）の両辺をxについて積分すると$f(x,y)$の推定式（ヌ）ができる。

$$f(x,y)=\boxed{⑤\qquad}+h(y) \qquad \text{(ヌ)}$$

式（ヌ）中の$h(y)$は積分定数の一種で、yの関数である。

式（ヌ）の$f(x,y)$を式（へ）に代入すると $h(y)$ が求められ、その結果、

$$f(x,y)=\boxed{⑥\qquad}$$

が得られる。

数　　　学	問題番号：　3

表 1　基本的な関数のラプラス変換

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$F(s)$ の定義域
1	$\dfrac{1}{s}$	$s > 0$
$t^p \ (p > -1)$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\exp(at)$	$\dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$\dfrac{t^n \exp(-at)}{n!}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$s > -a, \quad a > -1,$ $n = 0, 1, ..$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$

ただし、　$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$,　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

表 2 ラプラス変換の公式

公式	条件
$\mathcal{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$	$a > 0$ は定数
$\mathcal{L}[\exp(at) f(t)] = F(s-a)$	a は定数
$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}\left[f'^{(n)}(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots$ $- sf'^{(n-2)}(0) - f'^{(n-1)}(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u)\, du$

数　　学	問題番号：4

秘匿情報の集計に関する以下の[1]～[3]の問いに答えなさい。

ある製品Pを製造する工場がN個ある。製品Pの製造工程における歩留まり（※）Xは工場によって異なり、その値X_i $(i = 1, 2, \dots N)$は各工場の企業秘密であるとする。各X_iの値を秘匿としたまま、X_i の平均値 $\bar{X}$ を集計するため、統計担当者は、以下の手順で調査を実施することとした。

1) マスク用数値として平均0、標準偏差 σ の正規分布に従う乱数をN個発生させる。
2) N個のマスク用数値の合計値を記録する。
3) N個のマスク用数値を無作為にN工場に割り当てる。このとき、どの工場にどの数値が割り当てられたかは、統計担当者は知ることができないようにする。(たとえば、数値を書いた紙を封筒に入れてシャッフルしてから各工場に渡すなど)
4) 各工場は、自工場の歩留まりX_i に、自工場に割り当てられたマスク用数値 Y_i を加えた数値 $Z_i = X_i + Y_i$ を、統計担当者に報告する。
5) 統計担当者は、N個の報告値 Z_i を合計した値から、2)で記録しておいたマスク用数値の合計値を引き、その値をNで割ることで、X_i の平均値 $\bar{X}$ を得る。

ここで、統計担当者は、<u>(1) Z_i から X_i を知ることはできず、X_i の秘匿性は保たれている</u>。

さらに、歩留まりのばらつき、すなわち X_i の分散 $Var(X)$も求めたいとする。$Var(X)$は、X_iの平均値 $\bar{X}$ を用いて、以下の式で表すことができる。

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\text{あ})\right) - \bar{X}^2$$

つまり、X_i の平均値 $\bar{X}$ を求めるのに加え、<u>(2)（あ）の平均値を同様の手順で求めれば、X_i の分散を、X_i を秘匿としたまま求めることができる</u>。

（※）歩留まりとは、原材料の投入量に対する生産物の割合である。

[1]　下線部(1)に関し、マスク用数値 Y_i の標準偏差 σ は X_i の標準偏差と同程度とすることが秘匿性を保つ上で望ましい。その理由を、具体的な数値例を用いて説明しなさい。

[2]　（あ）にあてはまる数式または項を、X_i を用いて示しなさい。

[3]　下線部(2)に関し、マスク用数値は、X_i 用と（あ）用とで異なる数値を用いる必要がある。マスク用数値として、X_i 用と（あ）用とに各工場が同じ数値を用いて報告した場合、秘匿性を保てない。その理由を述べなさい。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

（下書き用紙 Sheet for drafting）