2024 年度

京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻入学資格者選考試験

修士課程　一般学力選考及び特別選考　試験問題

専門科目（数学）

注意事項

1．合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない。

2．この問題冊子には，専門科目（数学）の問題が４題記載してある。問題冊子は，表紙を除き合計５ページ（下書き用紙は含まない）である。4題とも解答すること。

3．問題冊子は，下書き用紙も含め切り離してはいけない。

4．専門科目（数学）試験は，２００点満点である。

5．解答用紙は４枚１組である。
なお，解答用紙の裏面は使用可であるが，その場合切取り線（用紙上部の実線）より下部を使用すること。また，すべての解答用紙の上部に必ず，受験番号・氏名，問題番号を記入すること。

6．試験時間は，１時間３０分である。（午前１０時から１１時３０分まで）

7．試験時間が終了したら直ちに解答をやめ，室長の指示に従うこと。解答用紙を持ち帰ることはできない。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

数　　学	問題番号： 1

（１枚の内１）

以下の[1]～[3]の問いに答えなさい。

[1]　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ 4 & 6 & 14 & 8 & 18 \\ -1 & -3 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい。

[2]　行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 、行列 $C = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について、

次の行列を求めなさい。ただし、行列 B の転置行列を ${}^{t}B$ と表すこととする。

[2-1]　${}^{t}(BC)$

[2-2]　${}^{t}B\,{}^{t}C$

[2-3]　${}^{t}C\,{}^{t}B$

[3]　行列 $D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ を対角化しなさい。

また、 D^n を求めなさい。ただし、n は自然数とする。

数　　　学	問題番号： 2

（1 枚の内 1）

以下の[1]~[3]の問いに答えなさい。
なお $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ は直交座標系(x, y, z)における x 方向、y 方向、z 方向の正の方向にそれぞれ向く単位ベクトルである。$\boldsymbol{F}$ はベクトル場を表す

[1]　$\boldsymbol{F} = yz\,\boldsymbol{i} + 2x^2y\,\boldsymbol{j} - xz\,\boldsymbol{k}$ の時、以下の式を計算しなさい。
[1-1]　rot $\boldsymbol{F}$
[1-2]　div $\boldsymbol{F}$
[1-3]　div (rot $\boldsymbol{F}$)
[1-4]　rot (rot $\boldsymbol{F}$)

[2]　$\boldsymbol{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\boldsymbol{j}$ の流線の一般式を求めなさい。
ただし、ベクトル場 $\boldsymbol{F} = a_1(x,y)\,\boldsymbol{i} + a_2(x,y)\,\boldsymbol{j}$ の流線とは、各点での接線が、$\boldsymbol{F}$ に平行であるような任意の曲線であり、

$$\frac{dx}{a_1(x,y)} = \frac{dy}{a_2(x,y)}$$

を満たす。

[3]　$\boldsymbol{F} = yz\,\boldsymbol{i} + 2y\,\boldsymbol{j} - x^2\,\boldsymbol{k}$ の時、次のおのおのの場合に、$\boldsymbol{F}$ の C に沿った線積分の値を求めなさい。
[3-1]　C が $x = t$、$y = t^2$、$z = t^3$、$0 \leqq t \leqq 1$ で与えられる時
[3-2]　C が O(0, 0, 0)から点 A(0, 0, 1)への線分と点 A から点 B(0, −3, 1)への線分と、
点 B から点 P(2, −3, 1)への線分からなる時

数　　　学	問題番号： 3

以下の[1]～[3]の微分方程式を解きなさい。なお、[3]のa、bは 0 ではなく、互いに異なる定数とする。
ラプラス変換を用いるときは、表1、 2 を参考にしなさい。

[1] $\frac{dx}{dt} + 2x = 2e^{-t}, x(0) = 4$

[2] $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + \cancel{17} = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
$17x$

[3] $\frac{dx}{dt} = ax,\ \frac{dy}{dt} = by - ax$
なお、$t = \cancel{t_0}$におけるxおよびyを各々x_0およびy_0とすること。
0

数　　学	問題番号： 3

(2 枚の内 2)

表 1　基本的な関数のラプラス変換

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$F(s)$ の定義域
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^p \ (p > -1)$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s > 0$
$t^n \ (\mathrm{n} = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\exp(at)$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$

ただし，　$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$,　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

表 2 ラプラス変換の公式

公式	条件
$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$ は定数
$\mathcal{L}[\exp(at) f(t)] = F(s-a)$	a は定数
$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}[f'^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots$ $- s f'^{(n-2)}(0) - f'^{(n-1)}(0)$	$f(t)$ は連続関数
$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u) g(u)\, du$

数　　　学	問題番号： 4

（1 枚の内 1）

以下の[1]、[2]の問いに答えなさい。

[1] 成功確率 θ の試行を n 回行ったとき、m 回成功し、$n-m$ 回失敗した。ただし、$0 \leq \theta \leq 1$ であり、n, m は整数で、$n \geq m \geq 0$ かつ $n \geq 1$ とする。

[1-1] 上記の事象が発生する確率を n, m, θ を用いて表しなさい。

[1-2] [1-1]で求めた n, m, θ を用いた式を θ の関数ととらえるとき、これを尤度とよび、尤度を最大にする θ を θ の最尤推定量とよぶ。また、尤度の対数を対数尤度とよび、対数尤度を最大にする θ と、尤度を最大にする θ は一致する。θ の最尤推定量を求めなさい。

[2] ある工場の製品の不良率 p を調査するため、検査を実施することとした。検査には誤差があり、良品が検査で不合格になる確率を a とし、不良品が検査で合格になる確率を b とする。ただし、$0 \leq p \leq 1,\ 0 < a \ll 1,\ 0 < b \ll 1$ とする。

[2-1] 無作為に抽出した 1 つの製品が検査に不合格となる確率を、a, b, p を用いて表しなさい。

[2-2] 無作為に抽出した n 個の製品を検査したところ、m 個の製品が検査に不合格し、$n-m$ 個の製品が検査に合格となった。このとき、製品の不良率 p の最尤推定量を求めなさい。

（下書き用紙 Sheet for drafting）

（下書き用紙 Sheet for drafting）