平成３０年度

京都大学大学院工学研究科都市環境工学専攻入学資格者選考試験

修士課程　一般学力選考及び特別選考　試験問題

専門科目（数学）

注意事項

1．合図があるまでこの問題冊子を開いてはならない．

2．この問題冊子には，専門科目（数学）の問題が４題記載してある．問題冊子は，表紙を除き合計８ページ（下書き用紙は含まない）である．4題とも解答すること．

3．問題冊子は，下書き用紙も含め切り離してはいけない．

4．専門科目（数学）試験は，２００点満点である．

5．解答用紙は４枚１組である．問題１題につきなるべく１ページに解答すること．なお，解答用紙の裏面は使用可であるが，その場合切取り線（用紙上部の実線）より下部を使用すること．また，すべての解答用紙の上部に必ず，受験番号・氏名，科目名，問題番号を記入すること．

6．試験時間は，１時間３０分である．（午前１０時から１１時３０分まで）

7．試験時間が終了したら直ちに解答をやめ，室長の指示に従うこと．解答用紙を持ち帰ることはできない．

（下書き用紙 Sheet for drafting）

数　　　学	問題番号： 1

（2枚の内1）

以下の[1]，[2]の問いに答えなさい．

[1]　行列および行列式に関する【①】～【⑳】に，適切な用語，あるいは数値，記号，行列，行列式，ベクトルを記入しなさい．

3つの未知数 x, y, z についての連立方程式

$$ax+by+cz=d$$
$$ex+fy+gz=h$$
$$ix+jy+kz=l$$

を考える．ここで，a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l は定数である．この連立方程式は，行列 $\boldsymbol{A}$，未知数の解ベクトル $\boldsymbol{x}$ と定数のベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて

【　①　】＝ $\boldsymbol{b}$

と表現できる．

ここで $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}$ の具体的な成分を表示すると，$\boldsymbol{A}$ は【　②　】，$\boldsymbol{x}$ は【　③　】，$\boldsymbol{b}$ は【　④　】である．クラメールの公式を用いると，$\boldsymbol{A}$ が【　⑤　】のとき，未知数の解ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在し，

$x = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}$【　⑥　】，　$y = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}$【　⑦　】，　$z = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}$【　⑧　】

と求められる．ただし，⑥，⑦，⑧は行列式である．

$\boldsymbol{A}$ の逆行列は，$\boldsymbol{A}$ が【　⑤　】の時に限って存在するが，これを $\boldsymbol{A}^{-1}$ とすると

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$ ＝【　⑨　】

である．したがって，$\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在するとき，

$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})$ ＝【　⑩　】

である．

3次の正方行列に対しては

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} 【⑪】 & 【⑫】 & 【⑬】 \\ 【⑭】 & 【⑮】 & 【⑯】 \\ 【⑰】 & 【⑱】 & 【⑲】 \end{bmatrix}$$

と表現できる．これを用いても

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$

から未知数の解ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めることができる．

数　　　学	問題番号： 1

もし，$d = h = l = 0$ で，A が【　⑤　】のとき，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{0}$ となる唯一の解ベクトルをもつ．この対偶をとると，

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$

が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる解ベクトルをもてば，$\det A =$【　⑳　】である．

[2]　次の x と y の連立一次方程式が解をもつように p の値を求めなさい．ただし，Gauss の消去法は使わず，計算過程を示しなさい．

$$\begin{aligned} (1-p)x \quad &- 4y = 2 \\ 2x + (7-p)&y = -4 \\ 4x \quad &+ 10y = -6-p \end{aligned}$$

数　　学	問題番号： 2

直交座標系(x, y, z)におけるベクトル場$\boldsymbol{A} = (yz, 2x^2, xyz)$について，以下の[1], [2]の問いに答えなさい．

[1]　以下の式を計算しなさい．

[1-1]　$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$

[1-2]　$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$

[1-3]　$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})$

[1-4]　$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})$

[2]　曲線 $\boldsymbol{C_1}$: $\boldsymbol{r}_1(t) = (t,\ t,\ t)$　　$(0 \leqq t \leqq 1)$
および
曲線 $\boldsymbol{C_2}$: $\boldsymbol{r}_2(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$　$(0 \leqq t \leqq 1)$
に沿う，以下の線積分の値を求めなさい．

[2-1]　$\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$

[2-2]　$\int_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$

数　　　学	問題番号： 3

（2枚の内1）

以下の[1], [2]の問いに答えなさい．ラプラス変換を用いるときは，表-1，表-2 を参考にしなさい．

[1] 次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 16y = \sin 2x$$

[2] 次の連立微分方程式を解きなさい．

$$\begin{cases} 5\dfrac{dx}{dt} - 2x = 6y \\ 5\dfrac{dy}{dt} + 7y = 6x \end{cases}$$

ただし，境界条件は $x(0) = 3$，$y(0) = -1$ とする．

数　　学	問題番号： 3

（2 枚の内 2）

表-1　基本的な関数のラプラス変換

$f(t)$	$F(s)$	$F(s)$ の定義域
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
$t^p\ (p>-1)$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$s>0$
$t^n\ (n=0,1,2,\cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$\exp(at)$	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$s>0$
$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$s>0$

ただし、$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

表-2　ラプラス変換の公式

公式	条件
$L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a>0$ は定数
$L\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$	a は定数
$L\left[f'(t)\right] = sF(s)-f(0)$	$f(t)$ は連続関数
$L\left[f^{(n)}(t)\right] = s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)$ $\cdot\cdot\cdot-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$	$f(t)$ は連続関数
$L[f*g(t)] = F(s)G(s)$	$f*g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

数　　学	問題番号：4

以下の[1]〜[4]の問いについて，空欄【　①　】〜【　⑨　】に入る適切な語句，数式または数値を答えなさい．選択肢が示されている場合は，適切なものを選びなさい．【　○：数式　】と記載されている場合は，数式を答えなさい．【　○：数値　】と記載されている場合は，有効数字 2 桁で数値を答えなさい．数値計算には，電卓または表-1 を用いなさい．

[1]　交通事故の発生がポアソン過程に従うと仮定する．すると，走行距離 L の間に交通事故が発生する回数を X としたとき，X の分布は，【①：二項分布・ポアソン分布・指数分布・ワイブル分布・正規分布】に従う．また，事故が初めて起きるまでの走行距離（以下，初生起距離と呼ぶ）L_1の分布は，【②：二項分布・ポアソン分布・指数分布・ワイブル分布・正規分布】に従う．初生起距離 L_1の累積分布関数 $F_1(L_1)$ は，走行距離当たり事故発生率 λ を用いて，式(1)で表すことができる．

$$F_1(L_1) = 1 - \exp(-\lambda L_1) \tag{1}$$

式(1)は，初生起距離が L_1 を超えない確率を与えている．
L_1 の確率密度関数 $f_1(L_1)$ は，式(1)の両辺を L_1 について微分することで得られる．

$$f_1(L_1) = 【\quad ③：数式\quad 】 \tag{2}$$

[2]　2 回目の事故が起きるまでの走行距離 L_2 の確率分布について考える．2 件目の事故が，走行距離 L_2 で起きる事象は，1 件目の事故が走行距離 L_1 $(0 < L_1 < L_2)$で起き，その後さらに走行距離 $L_2 - L_1$ を走行した時点で L_1 以降初めての事故（つまり，2 件目の事故）が起きる事象と解釈することができる．したがって，2 件目の事故が起きる走行距離 L_2 の確率密度関数 $f_2(L_2)$ は，事故発生率を λ として，式(2)より，式(3)で表すことができる．

$$f_2(L_2) = \int_0^{L_2} f_1(L_1)\cdot f_1(L_2 - L_1)\,dL_1 = 【\quad ④：数式\quad 】 \tag{3}$$

$f_2(L_2)$ に対応する累積分布関数 $F_2(L_2)$ は，式(3)の両辺を L_2 で積分して得られ，式(4)となる．

数　　　学	問題番号： 4

$$F_2(L_2) = \int_0^{L_2} f_2(L)\, dL = 【\ ⑤：数式\ 】 \tag{4}$$

[3]　2016 年 5 月 7 日，米国フロリダ州で，電気自動車メーカー テスラ社の自動車が自動運転モードで死亡事故を起こした．テスラ社は事故を公表した際，「自動運転モードには 130 メガマイル以上の走行実績があり，初めて死亡事故が起きた．米国では 94 メガマイルに 1 件，死亡事故が起きている」とし，人間の運転より安全だと主張した．

このテスラ社の主張に関して，テスラ社製自動車の自動運転モードでの死亡事故発生率（以下，テスラ社の事故発生率と呼ぶ）と米国平均の自動車の死亡事故発生率（以下，米国平均の事故発生率と呼ぶ）とに統計的に有意な差があるか検定する．

統計的検定を行うにあたり，以下の帰無仮説と対立仮説を立てる．

帰無仮説：テスラ社の事故発生率 λ_T は，米国平均の事故発生率と等しい．

対立仮説：テスラ社の事故発生率 λ_T は，米国平均の事故発生率よりも低い．

検定統計量には，初生起距離 L_1 を用い，有意水準は 5%とする．

帰無仮説のもとで，L_1 が，130 メガマイル以上となる確率を有効数字 2 桁で求めると，【 ⑥：数値 】となる．これより，テスラ社の事故発生率は，米国平均の事故発生率に比べ，有意水準 5%で統計的に有意に低いと【⑦：は言えない・言える】．

[4]　その後，2016 年 5 月の事故に先立ち，2016 年 1 月 20 日にも中国でテスラ社の自動車による自動運転モードでの死亡事故が起きていたことが明らかになった．

ここでは，中国と米国での事故発生率の違いを考慮せず，両者が等しいとして，130 メガマイルで 2 件目の死亡事故が発生した場合のテスラ社の事故発生率が，米国平均の事故発生率よりも統計的に高いか検定する．帰無仮説と対立仮説を以下の通りとする．

帰無仮説：テスラ社の事故発生率 λ_T は，米国平均の事故発生率と等しい．

対立仮説：テスラ社の事故発生率 λ_T は，米国平均の事故発生率よりも高い．

検定統計量には，2 回目の事故が起きる走行距離 L_2 を用い，有意水準は 5%とする．

帰無仮説のもとで，L_2 が 130 メガマイル以下となる確率を有効数字 2 桁で求めると，【 ⑧：数値 】となる．よって，有意水準 5%では，テスラ社の事故発生率が米国平均の事故発生率に比べて統計的に有意に高いと【⑨：は言えない・言える】．

数　　学	問題番号： 4

（3 枚の内 3）

表-1　指数関数の数表

x	exp(x)	x	exp(x)	x	exp(x)	x	exp(x)
0.000	1.00	-0.288	0.75	-0.693	0.50	-1.39	0.25
-0.0101	0.99	-0.301	0.74	-0.713	0.49	-1.43	0.24
-0.0202	0.98	-0.315	0.73	-0.734	0.48	-1.47	0.23
-0.0305	0.97	-0.329	0.72	-0.755	0.47	-1.51	0.22
-0.0408	0.96	-0.342	0.71	-0.777	0.46	-1.56	0.21
-0.0513	0.95	-0.357	0.70	-0.799	0.45	-1.61	0.20
-0.0619	0.94	-0.371	0.69	-0.821	0.44	-1.66	0.19
-0.0726	0.93	-0.386	0.68	-0.844	0.43	-1.71	0.18
-0.0834	0.92	-0.400	0.67	-0.868	0.42	-1.77	0.17
-0.0943	0.91	-0.416	0.66	-0.892	0.41	-1.83	0.16
-0.105	0.90	-0.431	0.65	-0.916	0.40	-1.90	0.15
-0.117	0.89	-0.446	0.64	-0.942	0.39	-1.97	0.14
-0.128	0.88	-0.462	0.63	-0.968	0.38	-2.04	0.13
-0.139	0.87	-0.478	0.62	-0.994	0.37	-2.12	0.12
-0.151	0.86	-0.494	0.61	-1.02	0.36	-2.21	0.11
-0.163	0.85	-0.511	0.60	-1.05	0.35	-2.30	0.10
-0.174	0.84	-0.528	0.59	-1.08	0.34	-2.41	0.09
-0.186	0.83	-0.545	0.58	-1.11	0.33	-2.53	0.08
-0.198	0.82	-0.562	0.57	-1.14	0.32	-2.66	0.07
-0.211	0.81	-0.580	0.56	-1.17	0.31	-2.81	0.06
-0.223	0.80	-0.598	0.55	-1.20	0.30	-3.00	0.05
-0.236	0.79	-0.616	0.54	-1.24	0.29	-3.22	0.04
-0.248	0.78	-0.635	0.53	-1.27	0.28	-3.51	0.03
-0.261	0.77	-0.654	0.52	-1.31	0.27	-3.91	0.02
-0.274	0.76	-0.673	0.51	-1.35	0.26	-4.61	0.01

（下書き用紙 Sheet for drafting）